GENERALISIERTE REGRESSION

Joern Ploennigs · AI4SC

GENERALISIERTE LINEARE MODELLE

Generalisierte Lineare Modelle (GLM) sind eine Verallgemeinerung der Linearen Modelle, die wir bereits kennen gelernt haben. Sie bilden einen gemeinsamen Rahmen, der zum Beispiel Lineare Regressionsmodelle und Logistische Regressionsmodelle umfasst. Sie folgen im Wesentlichen der Idee, die wir schon bei der logistischen Regression kennen gelernt haben, dass wir eine lineare Basisfunktion z_i haben:

$$z_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_{1,i} + \beta_2 \cdot x_{2,i} + \ldots + \beta_n \cdot x_{n,i}.$$

GLMs sind flexibel und erlauben den Einsatz verschiedener Zielverteilungen, das ist besonders wichtig, wenn klassische lineare Regression ungeeignet ist. Sie bilden oft die Grundlage für Klassifikations- und Regressionsmodelle in ML-Bibliotheken wie `statsmodels` oder `scikit-learn` .

die wir über eine *Verknüpfungsfunktion* $g(z_i)$ in eine Vorhersage unserer Zielvariable $\hat{z}_i$ transformieren

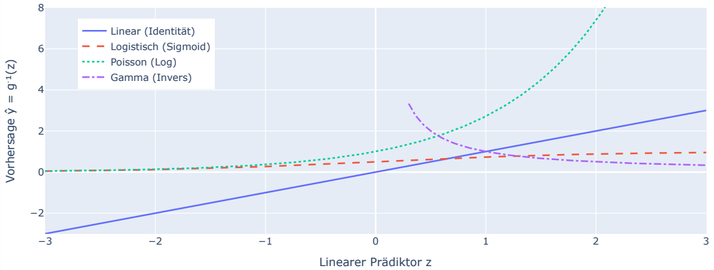
$$y_i = g(z_i) + \varepsilon.$$

Die Verknüpfungsfunktion übersetzt das lineare Modell (z.B. eine Temperatur-Zeit-Funktion) in die passende Skala der Zielgröße, wie zum Beispiel Wahrscheinlichkeiten, Zählwerte oder logarithmierte Kosten.

Diese Verknüpfungsfunktion kann eine Sigmoid-Funktion sein (Logistische Regression - Ob ein Betonbauteil unter Last versagt (Ja/Nein), eine Exponential-Funktion (Poisson Regression - Wie viele Fahrzeuge über eine Brücke pro Stunde fahren), eine Gamma-Funktion (Gamma Regression - Prognose von Baukosten oder Materialverbrauch) oder eine unveränderte z_i (Lineare Regression). Das erlaubt je nach Verteilungstyp der Zielvariable Eingangswerte zu transformieren, die anderen Verteilungen folgen und somit Variablen, die eigentlich andere Verteilungsformen haben in einem Vorhersagemodell kombinieren. Somit muss der Vorhersagefehler ε auch nicht mehr Normalverteilt sein, sondern kann andere Verteilungsformen annehmen.

Das Entscheidende hierbei ist, dass die Basisfunktion z_i immer noch linear ist und nur transformiert wird, das bedeutet, dass wenn sich die unabhängigen Variable $x_{k,i}$ ändert, sich auch die abhängige Variable y_i ändert, unabhängig vom Wert der anderen unabhängigen Variablen.

Die Koeffizienten $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ werden auch hier durch die schon diskutierte *Maximum-Likelihood-Schätzung (MLE)* bestimmt und zum Beispiel durch das Newtonverfahren iterativ angenähert.



Modell	$g^{-1}(z)$	Wertebereich	Anwendung
Linear	z	$\mathbb{R}$	Stetige Werte
Logistisch	$\frac{1}{1+e^{-z}}$	$(0,\ 1)$	Wahrscheinlichkeiten
Poisson	e^z	$\mathbb{R}_+$	Zählwerte
Gamma	$\frac{1}{z}$	$\mathbb{R}_+$	Kosten, Dauern

GENERALISIERTE ADDITIVE MODELLE

Bisher wurde immer eine Lineare Beziehung zwischen den Eingangsvariablen und der Zielvariable angenommen. Das sorgt für Modelle mit einfach zu verstehenden Parametern $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$. Dadurch sind die Modelle einfach zu berechnen und auch Praktikern gut zu erklären.

Allerdings ist die Annahme eines linearen Zusammenhanges für viele praktische Szenarien nicht immer haltbar, da z.B. in der Physik nichtlineare Zusammenhänge häufig vorkommen. Deshalb haben sich *Generalisierte Additive Modelle (GAM)* entwickelt, die die Idee der Verknüpfungsfunktion aus GLM übernehmen aber direkt auf die additiven einzelnen Elemente der linearen Gleichung anwenden. Dadurch das resultierende Modell zwar *additiv*, wie das lineare Modell, aber nicht notwendigerweise *linear*, da jede einzelne Transformationsfunktion $s_j(x_{j,i})$ nichtlinear sein kann.

$$y_i = \beta_0 + s_1(x_{1,i}) + s_2(x_{2,i}) + \ldots + s_n(x_{n,i}) + \varepsilon = \beta_0 + \sum_{j=1}^{n} s_j(x_{j,i}) + \varepsilon.$$

Die Schwierigkeit besteht darin die Transformationsfunktion $s_j(x_{j,i})$ in ihren Beiträgen zu y_i zu bestimmen. Hierfür nimmt man an, dass $s_j(x_{j,i})$ eine *glatte* Funktion ist (stetig und beliebig oft differenzierbar (zum Fitting)). Hierfür werden meist Spline-Funktionen benutzt.

Viele moderne Implementierungen von GAMs nutzen zum Bestimmen der Transformationsfunktionen den Ansatz der Rankreduktion(Reduced-rank Minimization), da er eine schnelle Schätzung der Parameter ermöglicht. Hierfür wird für die Transformationsfunktion angenommen, dass sie ein Spline aus K_j Basisfunktionen ist, die gegeben ist durch

$$s_j(x_j) = \sum_{k=1}^{K_j} \beta_{j,k} b_{j,k}(x_j)$$

wobei die $b_{j,k}(x_j)$ bekannte Basisfunktionen sind, die in der Regel aufgrund guter Approximationseigenschaften gewählt werden (z.B. B-Splines) und die $\beta_{j,k}$ Koeffizienten sind, die im Rahmen der Modellanpassung geschätzt werden müssen. Die Basisdimension K_j sollte dabei so gewählt werden, dass eine gute Anpassung der vorliegenden Daten zu erwarten ist, aber klein genug, um die Effizienz der Berechnung zu erhalten.

Durch ersetzen aller Transformationsfunktionen $s_j(x_{j,i})$ durch Basisfunktionen, können diese in bekannter Weise durch Ableitung iterativ die Koeffizienten $\beta_{j,k}$ bestimmen können.

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{K_j} \beta_{j,k} b_{j,k}(x_j) + \varepsilon.$$

GAM in Python mit Statsmodels

Für GAM Modelle eignet sich insbesondere die *statsmodels* Bibliothek. Als Beispiel nutzen wir wieder den Energiedatensatz der Universität Rostock. Wir wollen noch einmal den Energiekonsum vorhersagen.

```
import pandas as pd # Import von Pandas
import plotly.express as px # Import von Plotly

egywth = pd.read_csv("../data/UROS/Energy1D_weather_clean.csv", parse_dates=[0])
egywth["Weekday"] = egywth["Date"].dt.day_name()
egywthN=egywth.dropna().copy()
egywthN.head()
```

	Date	EV_HT_740	EV_NT_740	E_AV_Lab	E_SV_Lab	ES_Lab	DATUM_DT	STATIONS_ID	MESS_DATUM	QN_3	...	UPM	TXK	TNK	TGK	eor	TemperaturKlasse	HeizKuehlTage	QNS_4
2	2021-01-01 00:00:00+00:00	0.0	4080.0	1221.0	290.0	1.0	2021-01-01 00:00:00+00:00	4271.0	20210101.0	10.0	...	90.0	3.0	1.1	0.3	eor	Cold	Heizgradtag	nicht Para korri
3	2021-01-02 00:00:00+00:00	1170.0	2630.0	1243.0	284.0	2.0	2021-01-02 00:00:00+00:00	4271.0	20210102.0	10.0	...	95.0	4.0	2.6	2.0	eor	Cold	Heizgradtag	nicht Para korri
4	2021-01-03 00:00:00+00:00	0.0	3750.0	1222.0	283.0	2.0	2021-01-03 00:00:00+00:00	4271.0	20210103.0	10.0	...	81.0	4.6	2.4	0.8	eor	Cold	Heizgradtag	nicht Para korri
5	2021-01-04 00:00:00+00:00	3240.0	1110.0	1263.0	295.0	5.0	2021-01-04 00:00:00+00:00	4271.0	20210104.0	10.0	...	84.0	4.4	3.0	2.4	eor	Cold	Heizgradtag	nicht Para korri
6	2021-01-05 00:00:00+00:00	3470.0	1120.0	1346.0	299.0	1.0	2021-01-05 00:00:00+00:00	4271.0	20210105.0	10.0	...	88.0	4.7	3.0	2.6	eor	Cold	Heizgradtag	nicht Para korri

5 rows × 31 columns

Um ein GAM-Modell zu erzeugen, nutzen wir die GAM API von Statsmodels. Dafür müssen wir separat die B-Splines initialisieren.

```
import statsmodels.api as sm
from statsmodels.gam.api import GLMGam, BSplines

bs = BSplines(egywthN[['TMK', "SDK", "NM", "VPM"]], df=[4, 4, 4, 4], degree=[3, 3, 3, 3])

# Fit the GAM model
smfgam = GLMGam.from_formula(formula="ES_Lab ~ TMK + SDK + NM + VPM + Weekday", data=egywthN, smoother=bs)
smfgam = smfgam.fit()
egywthN["gam"]=smfgam.predict()
```

```
smfgam.summary()
```

Generalized Linear Model Regression Results

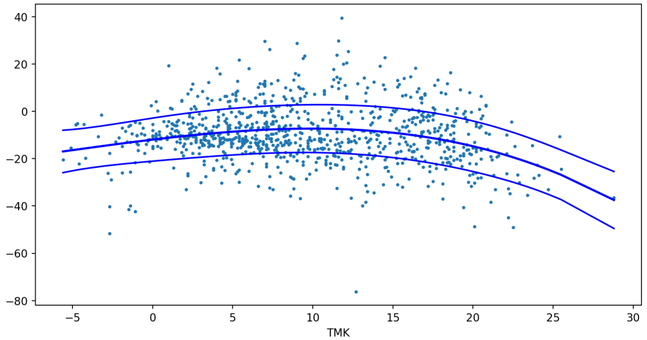
Dep. Variable:	ES_Lab	**No. Observations:**	916
Model:	GLMGam	**Df Residuals:**	897.00
Model Family:	Gaussian	**Df Model:**	18.00
Link Function:	Identity	**Scale:**	140.96
Method:	PIRLS	**Log-Likelihood:**	-3556.6
Date:	Sat, 06 Jun 2026	**Deviance:**	1.2645e+05
Time:	11:24:03	**Pearson chi2:**	1.26e+05
No. Iterations:	3	**Pseudo R-squ. (CS):**	0.9994
Covariance Type:	nonrobust		

	coef	std err	z	P>|z|	[0.025	0.975]
Intercept	-16.9526	4.580	-3.701	0.000	-25.930	-7.975
Weekday[T.Monday]	-0.3399	1.470	-0.231	0.817	-3.220	2.540
Weekday[T.Saturday]	-0.0973	1.474	-0.066	0.947	-2.986	2.792
Weekday[T.Sunday]	1.2628	1.478	0.855	0.393	-1.633	4.159
Weekday[T.Thursday]	-0.1677	1.472	-0.114	0.909	-3.053	2.718
Weekday[T.Tuesday]	1.0461	1.472	0.711	0.477	-1.840	3.932
Weekday[T.Wednesday]	-0.3203	1.476	-0.217	0.828	-3.213	2.573
TMK	2.3254	0.280	8.299	0.000	1.776	2.875
SDK	6.9210	0.197	35.082	0.000	6.534	7.308
NM	3.8209	0.459	8.319	0.000	2.921	4.721
VPM	-2.1580	0.429	-5.029	0.000	-2.999	-1.317
TMK_s0	10.7403	9.344	1.149	0.250	-7.574	29.054
TMK_s1	21.3749	8.604	2.484	0.013	4.511	38.238
TMK_s2	-20.5221	4.429	-4.634	0.000	-29.202	-11.842
SDK_s0	-15.3776	3.412	-4.507	0.000	-22.065	-8.691
SDK_s1	-3.9177	4.190	-0.935	0.350	-12.130	4.295
SDK_s2	8.1667	2.195	3.720	0.000	3.864	12.469
NM_s0	-7.3902	4.881	-1.514	0.130	-16.957	2.177
NM_s1	8.9931	2.975	3.023	0.003	3.162	14.824
NM_s2	-3.0544	1.421	-2.149	0.032	-5.840	-0.269

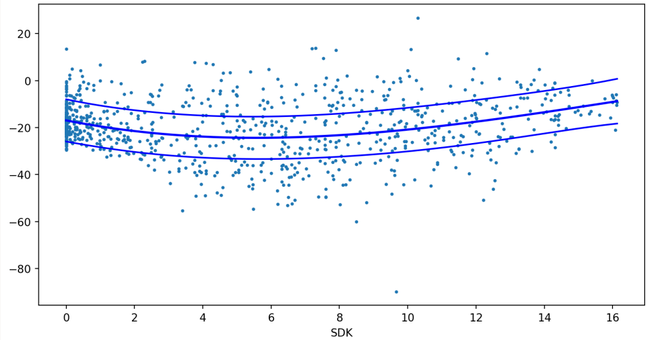
VPM_s0	-13.5880	8.606	-1.579	0.114	-30.455	3.279
VPM_s1	-12.6270	6.747	-1.872	0.061	-25.851	0.597
VPM_s2	15.0970	3.274	4.611	0.000	8.680	21.514

Das Besondere ist, dass wir die einzelnen Transferfunktionen uns anzeigen lassen können, mit dem gewichteten Residuen des Eingangs. Dadurch bleibt das Modell erklärbar.

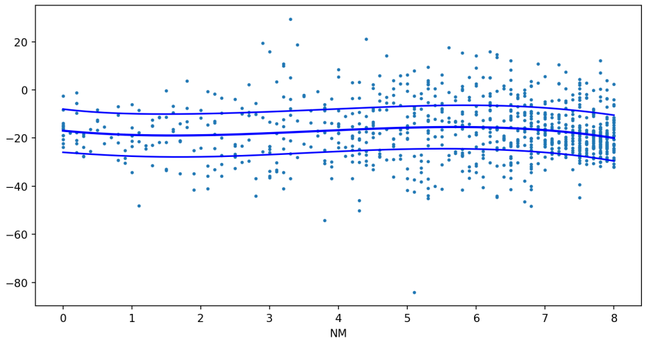
```
fig = smfgam.plot_partial(0, cpr=True)
```



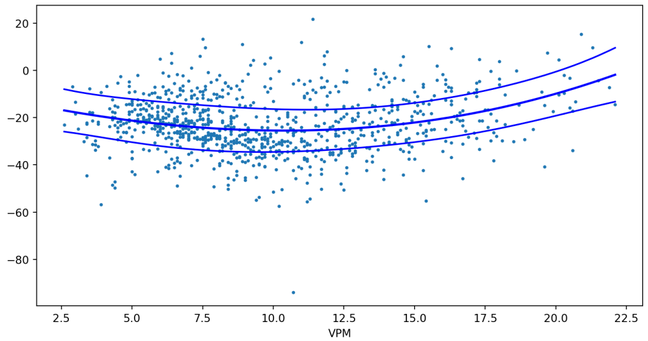

```
fig = smfgam.plot_partial(1, cpr=True)
```



```
fig = smfgam.plot_partial(2, cpr=True)
```




```
fig = smfgam.plot_partial(3, cpr=True)
```



Verleich zum Linearem Modell

Vergleichen wir das mit dem alten Linearen Modell.

```
import statsmodels.formula.api as smf
smflm = smf.ols("ES_Lab ~ TMK + SDK + NM + VPM + Weekday", data=egywthN).fit()
egywthN["ols"]=smflm.predict()
smflm.summary()
```

OLS Regression Results

Dep. Variable:	ES_Lab	**R-squared:**	0.873
Model:	OLS	**Adj. R-squared:**	0.872
Method:	Least Squares	**F-statistic:**	621.6
Date:	Sat, 06 Jun 2026	**Prob (F-statistic):**	0.00
Time:	11:24:03	**Log-Likelihood:**	-3591.7
No. Observations:	916	**AIC:**	7205.
Df Residuals:	905	**BIC:**	7258.
Df Model:	10		
Covariance Type:	nonrobust		

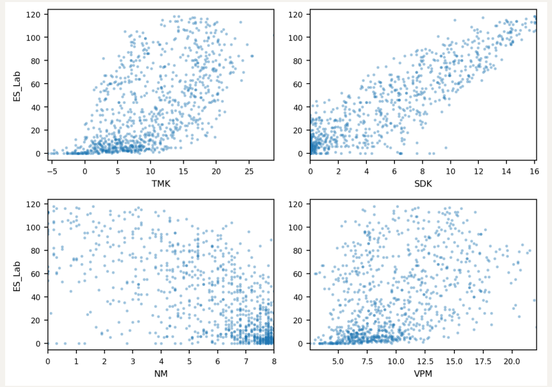
	coef	std err	t	P>|t|	[0.025	0.975]
Intercept	-20.2008	3.196	-6.320	0.000	-26.474	-13.928
Weekday[T.Monday]	-0.6513	1.519	-0.429	0.668	-3.632	2.329
Weekday[T.Saturday]	-0.3169	1.522	-0.208	0.835	-3.305	2.671
Weekday[T.Sunday]	0.5073	1.524	0.333	0.739	-2.483	3.498
Weekday[T.Thursday]	-0.4597	1.519	-0.303	0.762	-3.441	2.522
Weekday[T.Tuesday]	1.1055	1.518	0.728	0.467	-1.875	4.085
Weekday[T.Wednesday]	-0.3329	1.520	-0.219	0.827	-3.315	2.650
TMK	1.8619	0.218	8.557	0.000	1.435	2.289
SDK	7.0105	0.189	37.032	0.000	6.639	7.382
NM	3.5985	0.349	10.310	0.000	2.914	4.284
VPM	-1.4871	0.322	-4.616	0.000	-2.119	-0.855

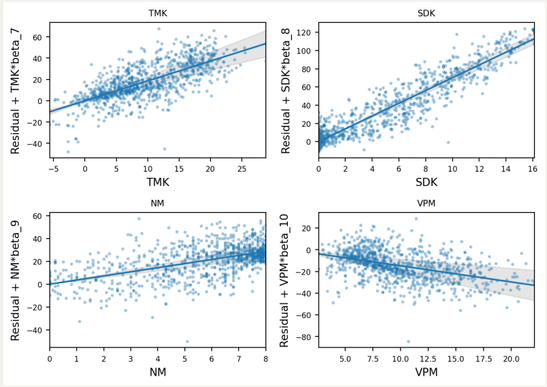
Omnibus:	36.205	**Durbin-Watson:**	1.115
Prob(Omnibus):	0.000	**Jarque-Bera (JB):**	77.580
Skew:	-0.219	**Prob(JB):**	1.42e-17
Kurtosis:	4.357	**Cond. No.**	147.

Notes:

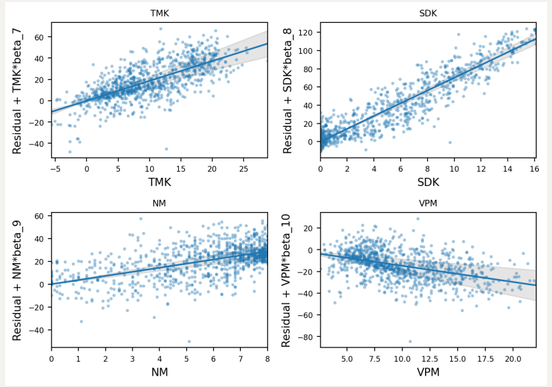
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.

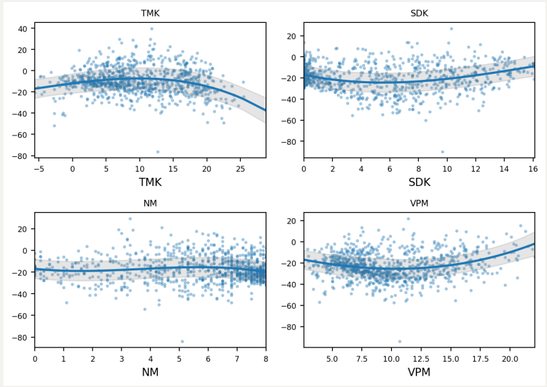
Verleich von Scatterplot und Linearen Modell





Verleich von Linearen Modell und GAM-Modell





Vergleichen wir die Qualität beider Modelle

```
from sklearn.metrics import mean_absolute_error, r2_score
r2_score(egywthN.ES_Lab, egywthN.ols), mean_absolute_error(egywthN.ES_Lab, egywthN.ols)
```

```
(0.872909238506527, 9.238732131049021)
```

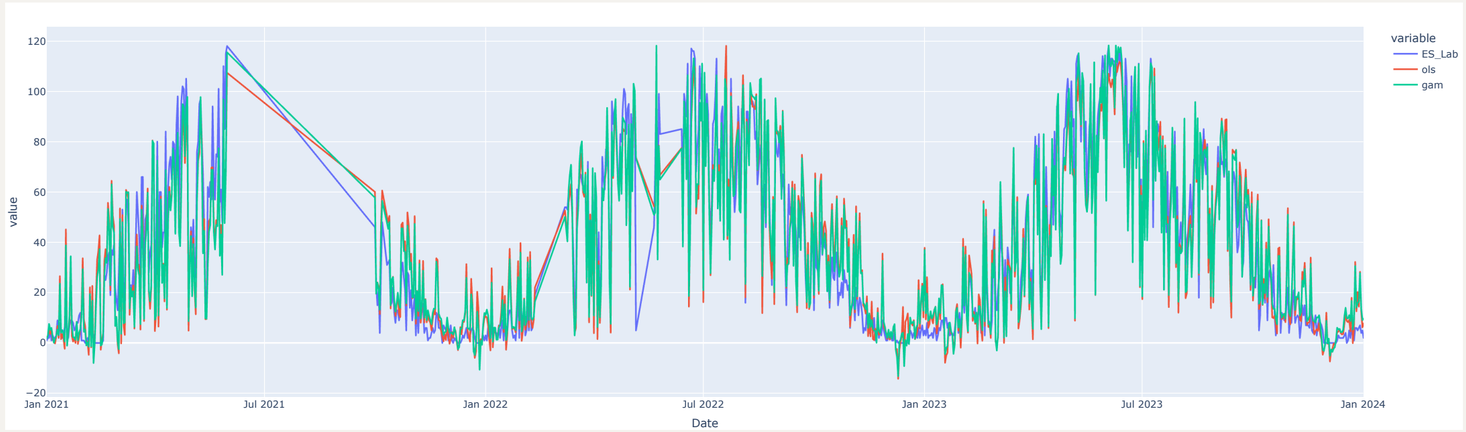
```
r2_score(egywthN.ES_Lab, egywthN.gam), mean_absolute_error(egywthN.ES_Lab, egywthN.gam)
```

```
(0.8822826884210837, 8.869769884021528)
```

so sehen wir das das GAM-Modell etwas besser ist, aber nicht deutlich.

Das zeigt sich auch im Plot.

```
fig=px.line(egywthN, x="Date", y=["ES_Lab", "ols", "gam"])
fig.show()
```



ARMA - AUTOREGRESSIVE MOVING AVERAGE

Ein Aspekt den wir bisher in unserem Datensatz ignoriert haben, ist die Tatsache, dass es sich bei der Energie um eine Zeitreihe handelt und wir im Linien-Diagramm bereits beobachtet haben, dass Werte sehr stark vom Vorgängerwert abhängen. Diese Abhängigkeit bezeichnet man als *Autoregression*. Um diese Autoregression zu modellieren, gibt es spezielle Modelle. Ein sehr typisches Modell ist das ARIMA-Modell. Es gleicht einem Linearem Regressionsmodell, das als Eingang bis zu p vergangenen Zielwerte y_{i-k} für $0 < k < p$ betrachtet als auch die q früheren Vorhersagefehler ε_{i-j} integriert.

$$y_i = \beta_0 + \overbrace{\sum_{k=1}^{p} a_k y_{i-k}}^{AR-Modell} + \overbrace{\sum_{j=1}^{q} b_j \varepsilon_{i-j}}^{MA-Modell} + \varepsilon_i.$$

Hierbei ist das AR-Modell ein Modell das mit den Koeffizient a_k den Einfluss des k-ten vergangenen Werts y_{i-k} auf den aktuellen Wert y_i darstellt. Das MA-Modell modelliert die Abweichung vom gleitenden Durchschnitt in Form der vergangenen Fehlerterme ε_{i-k}. Die Ordnungen p und q können bestimmt werden durch Analyse der Autokorrelationsfunktion (ACF) zur Bestimmung der Ordnung q des MA-Teils und der Partielle Autokorrelationsfunktion (PACF) zur Bestimmung der Ordnung p des AR-Teils.

Ein ARMA-Modell kann erstellt werden mit dem ARIMA-Modul von Statsmodels. Wichtig ist hierbei, dass wir eine äquidistante Zeitreihe mit einer festen Abtastrate nutzen. Fehlende Werte sollten dabei vor der Modellierung geeignet behandelt werden, da wir explizit Vorgängerwerte mit betrachten.

```
from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA

arma_mod = ARIMA(egywth.ES_Lab, order=(8, 0, 1), trend="n")
arma_res = arma_mod.fit()
egywth["arma"]=arma_res.predict()
arma_res.summary()
```

SARIMAX Results

Dep. Variable:	ES_Lab	**No. Observations:**	1098
Model:	ARIMA(8, 0, 1)	**Log Likelihood**	-4618.230
Date:	Sat, 06 Jun 2026	**AIC**	9256.460
Time:	11:24:06	**BIC**	9306.472
Sample:	0	**HQIC**	9275.381
	- 1098		
Covariance Type:	opg		

	coef	std err	z	P>|z|	[0.025	0.975]
ar.L1	0.9694	0.087	11.204	0.000	0.800	1.139
ar.L2	-0.0496	0.045	-1.110	0.267	-0.137	0.038
ar.L3	-0.0416	0.039	-1.075	0.282	-0.117	0.034
ar.L4	-0.0114	0.038	-0.305	0.761	-0.085	0.062
ar.L5	0.0115	0.037	0.312	0.755	-0.061	0.084
ar.L6	0.0597	0.037	1.634	0.102	-0.012	0.131
ar.L7	-0.0106	0.037	-0.291	0.771	-0.082	0.061
ar.L8	0.0671	0.035	1.908	0.056	-0.002	0.136
ma.L1	-0.6439	0.088	-7.343	0.000	-0.816	-0.472
sigma2	297.2980	9.665	30.761	0.000	278.356	316.240

Ljung-Box (L1) (Q):	0.00	**Jarque-Bera (JB):**	310.11
Prob(Q):	0.96	**Prob(JB):**	0.00
Heteroskedasticity (H):	0.87	**Skew:**	-0.56
Prob(H) (two-sided):	0.19	**Kurtosis:**	5.35

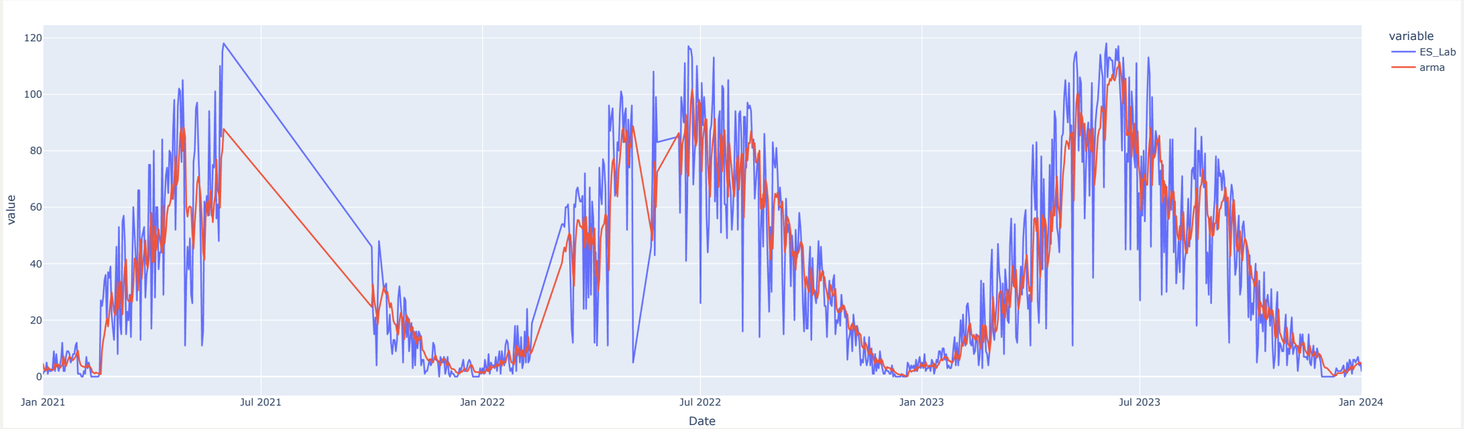
Warnings:
[1] Covariance matrix calculated using the outer product of gradients (complex-step).

Wenn wir das Modell vergleichen mit den vorherigen Modellen, so ist das Vorhersagemodell schlechter und im Diagramm zeigt sich, dass die Vorhersagen geglätteter sind. Allerdings bemötigt das Modell auch keine weitere externen Eingangsvariablen.

```
egywthN=egywth.dropna()
r2_score(egywthN.ES_Lab, egywthN.arma), mean_absolute_error(egywthN.ES_Lab, egywthN.arma)
```

```
(0.7671305048342131, 11.297525605335332)
```

```
fig=px.line(egywthN, x="Date", y=["ES_Lab", "arma"])
fig.show()
```



AUTOREGRESSIVE LINEARE UND GAM MODELLE

Wir können auch in unsere bisherigen Modelle die Autoregressive Komponente integrieren, indem wir uns eine verschobene Zielvariable definieren. Da wir wissen, dass es auch einen wöchentlichen Saison gibt, fügen wir auch den 7-Tage Lag hinzu.

```
egywth["ES_Lab1"]=egywth.ES_Lab.shift(1)
egywth["ES_Lab7"]=egywth.ES_Lab.shift(7)
egywth.head()
```

	Date	EV_HT_740	EV_NT_740	E_AV_Lab	E_SV_Lab	ES_Lab	DATUM_DT	STATIONS_ID	MESS_DATUM	QN_3	...	TGK	eor	TemperaturKlasse	HeizKuehlTage	QNS_4	QNF_4	We
0	2020-12-30 00:00:00+00:00	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	2020-12-30 00:00:00+00:00	4271.0	20201230.0	10.0	...	2.2	eor	Cold	Heizgradtag	nicht alle Parameter korrigiert	5	W
1	2020-12-31 00:00:00+00:00	NaN	NaN	1256.0	291.0	5.0	2020-12-31 00:00:00+00:00	4271.0	20201231.0	10.0	...	0.9	eor	Cold	Heizgradtag	nicht alle Parameter korrigiert	5	Th
2	2021-01-01 00:00:00+00:00	0.0	4080.0	1221.0	290.0	1.0	2021-01-01 00:00:00+00:00	4271.0	20210101.0	10.0	...	0.3	eor	Cold	Heizgradtag	nicht alle Parameter korrigiert	5	Fr
3	2021-01-02 00:00:00+00:00	1170.0	2630.0	1243.0	284.0	2.0	2021-01-02 00:00:00+00:00	4271.0	20210102.0	10.0	...	2.0	eor	Cold	Heizgradtag	nicht alle Parameter korrigiert	5	Sa
4	2021-01-03 00:00:00+00:00	0.0	3750.0	1222.0	283.0	2.0	2021-01-03 00:00:00+00:00	4271.0	20210103.0	10.0	...	0.8	eor	Cold	Heizgradtag	nicht alle Parameter korrigiert	5	Su

5 rows × 34 columns

```
import statsmodels.formula.api as smf

egywthN=egywth.dropna().copy()
smflmAR = smf.ols("ES_Lab ~ TMK + SDK + NM + VPM + Weekday + ES_Lab1 + ES_Lab7", data=egywthN).fit()
egywthN["olsAR"]=smflmAR.predict()
smflmAR.summary()
```

OLS Regression Results

Dep. Variable:	ES_Lab	**R-squared:**	0.924
Model:	OLS	**Adj. R-squared:**	0.922
Method:	Least Squares	**F-statistic:**	896.6
Date:	Sat, 06 Jun 2026	**Prob (F-statistic):**	0.00
Time:	11:24:06	**Log-Likelihood:**	-3312.8
No. Observations:	904	**AIC:**	6652.
Df Residuals:	891	**BIC:**	6714.
Df Model:	12		
Covariance Type:	nonrobust		

	coef	std err	t	P>|t|	[0.025	0.975]
Intercept	-14.4569	2.513	-5.754	0.000	-19.388	-9.526
Weekday[T.Monday]	-0.7777	1.183	-0.657	0.511	-3.099	1.544
Weekday[T.Saturday]	0.3123	1.188	0.263	0.793	-2.019	2.644
Weekday[T.Sunday]	0.1938	1.188	0.163	0.870	-2.138	2.526
Weekday[T.Thursday]	-0.8354	1.182	-0.707	0.480	-3.155	1.484
Weekday[T.Tuesday]	0.4710	1.184	0.398	0.691	-1.852	2.794
Weekday[T.Wednesday]	-0.6982	1.184	-0.590	0.556	-3.022	1.626
TMK	0.8811	0.174	5.057	0.000	0.539	1.223
SDK	5.2479	0.164	32.041	0.000	4.926	5.569
NM	2.5453	0.276	9.225	0.000	2.004	3.087
VPM	-1.1769	0.252	-4.663	0.000	-1.672	-0.682
ES_Lab1	0.2442	0.017	14.502	0.000	0.211	0.277
ES_Lab7	0.1613	0.016	10.014	0.000	0.130	0.193

Omnibus:	167.812	**Durbin-Watson:**	1.758
Prob(Omnibus):	0.000	**Jarque-Bera (JB):**	1687.767
Skew:	-0.519	**Prob(JB):**	0.00
Kurtosis:	9.613	**Cond. No.**	617.

Notes:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.

```
bs = BSplines(egywthN[['TMK', "SDK", "NM", "VPM", "ES_Lab1", "ES_Lab7"]], df=[4, 4, 4, 4, 4, 4], degree=[3, 3, 3, 3, 3, 3])

# Fit the GAM model
smfgamAR = GLMGam.from_formula(formula="ES_Lab ~ TMK + SDK + NM + VPM + Weekday + ES_Lab1 + ES_Lab7", data=egywthN, smoother=bs)
smfgamAR = smfgamAR.fit()
egywthN["gamAR"]=smfgamAR.predict()
smfgamAR.summary()
```

Generalized Linear Model Regression Results

Dep. Variable:	ES_Lab	**No. Observations:**	904
Model:	GLMGam	**Df Residuals:**	879.00
Model Family:	Gaussian	**Df Model:**	24.00
Link Function:	Identity	**Scale:**	84.078
Method:	PIRLS	**Log-Likelihood:**	-3273.2
Date:	Sat, 06 Jun 2026	**Deviance:**	73904.
Time:	11:24:06	**Pearson chi2:**	7.39e+04
No. Iterations:	3	**Pseudo R-squ. (CS):**	1.000
Covariance Type:	nonrobust		

	coef	std err	z	P>|z|	[0.025	0.975]
Intercept	-19.4264	3.587	-5.415	0.000	-26.458	-12.395
Weekday[T.Monday]	-0.5701	1.143	-0.499	0.618	-2.810	1.670
Weekday[T.Saturday]	0.4399	1.147	0.384	0.701	-1.808	2.688
Weekday[T.Sunday]	0.8260	1.154	0.716	0.474	-1.437	3.089
Weekday[T.Thursday]	-0.8211	1.145	-0.717	0.473	-3.065	1.422
Weekday[T.Tuesday]	0.2365	1.145	0.207	0.836	-2.007	2.480
Weekday[T.Wednesday]	-0.9639	1.149	-0.839	0.402	-3.216	1.288
TMK	0.7624	0.232	3.289	0.001	0.308	1.217
SDK	5.2653	0.169	31.231	0.000	4.935	5.596
NM	2.7734	0.363	7.637	0.000	2.062	3.485
VPM	-0.8343	0.341	-2.447	0.014	-1.503	-0.166
ES_Lab1	0.2495	0.020	12.211	0.000	0.209	0.289
ES_Lab7	0.1613	0.019	8.400	0.000	0.124	0.199
TMK_s0	-1.7939	7.462	-0.240	0.810	-16.420	12.832
TMK_s1	1.4958	6.725	0.222	0.824	-11.686	14.677
TMK_s2	-3.5395	3.556	-0.995	0.320	-10.509	3.430
SDK_s0	-13.2594	2.728	-4.861	0.000	-18.606	-7.913
SDK_s1	-2.9991	3.658	-0.820	0.412	-10.169	4.171

SDK_s2	6.7456	1.981	3.406	0.001	2.864	10.627
NM_s0	-3.5070	3.817	-0.919	0.358	-10.988	3.974
NM_s1	6.5826	2.313	2.847	0.004	2.050	11.115
NM_s2	-2.8727	1.112	-2.583	0.010	-5.053	-0.693
VPM_s0	10.0927	6.842	1.475	0.140	-3.318	23.503
VPM_s1	-8.4793	5.294	-1.602	0.109	-18.855	1.896
VPM_s2	4.8360	2.585	1.871	0.061	-0.230	9.902
ES_Lab1_s0	7.0842	3.314	2.138	0.033	0.589	13.580
ES_Lab1_s1	1.4823	3.446	0.430	0.667	-5.271	8.236
ES_Lab1_s2	-3.3475	1.729	-1.937	0.053	-6.736	0.041
ES_Lab7_s0	2.3402	3.157	0.741	0.459	-3.848	8.528
ES_Lab7_s1	5.4789	3.170	1.729	0.084	-0.733	11.691
ES_Lab7_s2	-4.4313	1.573	-2.817	0.005	-7.514	-1.348

Die resultierenden Modelle sind durch Hinzufügen der autoregressiven Komponente deutlich besser. Es erfordert allerdings eine äquidistante Zeitreihe da sonst Abhängigkeiten inkorrekt aufgelöst werden.

```
r2_score(egywthN.ES_Lab, egywthN.olsAR), mean_absolute_error(egywthN.ES_Lab, egywthN.olsAR)
```

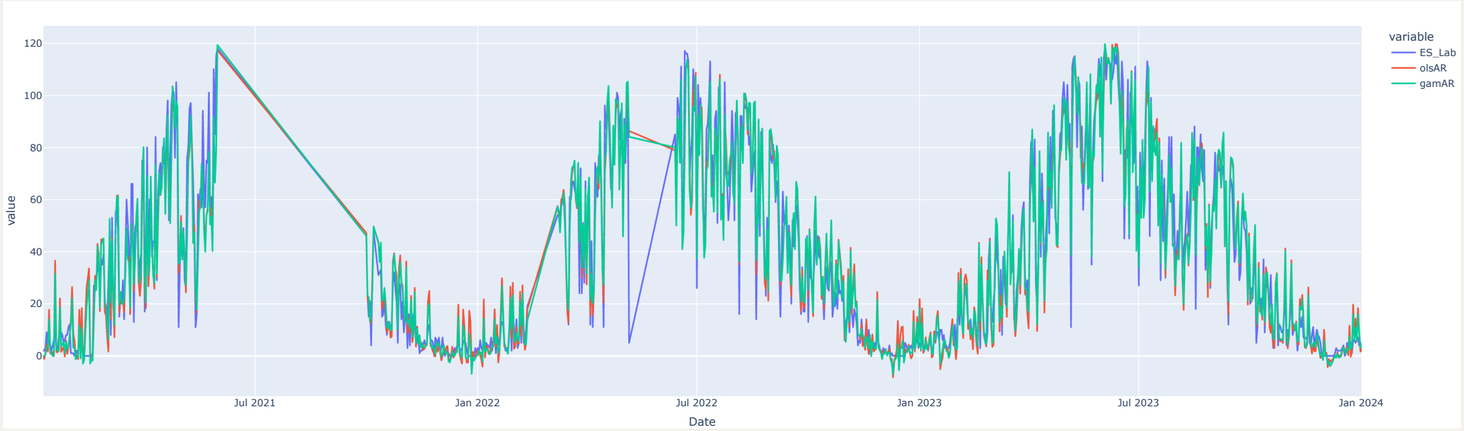
```
(0.9235182503946626, 6.791042887432227)
```

```
r2_score(egywthN.ES_Lab, egywthN.gamAR), mean_absolute_error(egywthN.ES_Lab, egywthN.gamAR)
```

```
(0.9299315803850143, 6.507654076564162)
```

Auch zeigt sich, dass sich bei den täglichen Werten das einfache lineare Modell und das komplexere GAM-Modell nur leicht unterscheiden. In diesem Datensatz ist das GAM hier geringfügig besser, in anderen Datensätzen kann sich das aber auch umkehren.

```
fig=px.line(egywthN, x="Date", y=["ES_Lab", "olsAR", "gamAR"])
fig.show()
```



QUESTIONS